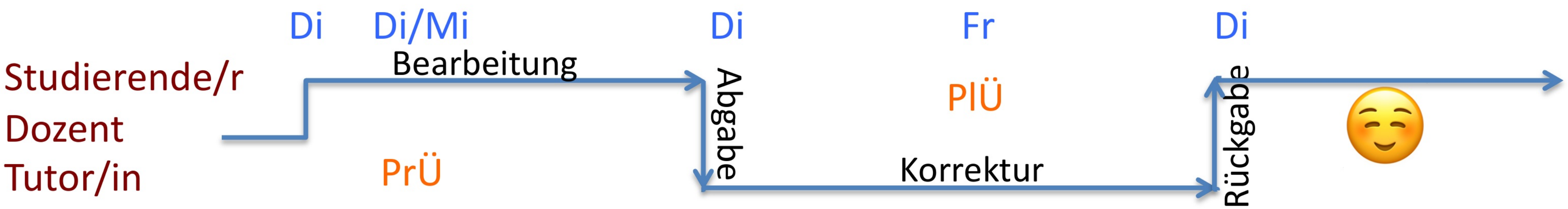
Mathematische Methoden der Physik

Crash-Kurs in der Sprache der Physik, mit Anwendungen in Newtonscher Mechanik

- Was? Vorlesung V (Lechtenfeld) / Präsenzübungen PrÜ (Tutoren) / Plenarübung PlÜ (Dr. Flohr)
- Wann? Di 12–14 & Fr 14–15 / Di 14, 16 oder Mi 08, 10, 12 / Fr 15–16 Wo? E214
- V & PlÜ: Smartboard & Tafel, Vorlesungs-Skript vorher und -Anschrift nachher
  Publikumsquiz mit eduvote.de: registrieren & App download; Uni hat Rahmenlizenz
- PrÜ: Auswahl einer Ü-Gruppe, Bearbeitung von Aufgaben unter Anleitung, Vorbereitung HÜ
- HÜ: Organisationszyklus der Hausübungen:



- Leistungen: Studienleistung = 50% der händischen HÜ-Punkte & 50% der Computerübungen
  Prüfungsleistung = Bestehen der Klausur (10.02. oder 24.03.)
- Kommunikation: stud.IP www.uni-hannover.de/de/studium/elearning
  meine Homepage www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/
  - Anmelden in einer Ü-Gruppe (wann und wo)
  - Herunterladen von Dateien (Skripten, Übungsblätter, Videos, Hand-Outs)
  - Umfragen (zu Ihren Vorkenntnissen, Evaluation von V, PrÜ und PlÜ)
  - Ankündigungen (Hinweise zu V, PlÜ, PrÜ und HÜ, aktuelle Änderungen)

... und natürlich ansprechbar: 1 Ihr/e Tutor/in, 2 Dr. Flohr, 3 ich selbst

I. Vektoren

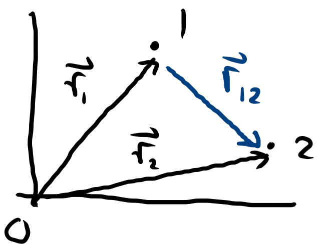
I.1 Richtung und Betrag

Ortsvektor = Pfeil vom Bezugspunkt (O) zu einem interessierenden Punkt

Notation: $\vec{r}$ $\vec{x}$, $\underset{\sim}{r}$, $\mathbf{r}$

Verschiebevektor = Pfeil, der Punkt (1) mit Punkt (2) verbindet

Notation: $\vec{r}_{12}$

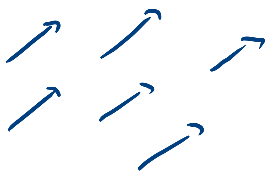


Betrag = Länge des Vektors

(Norm) = nichtnegative Zahl, evtl. mit Einheit

Vereinfachung: Pfeilklassen (vergesse Aufpunkt)

verschieben ändert nichts



Ausnahme: Ortsvektor

Notation: $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$

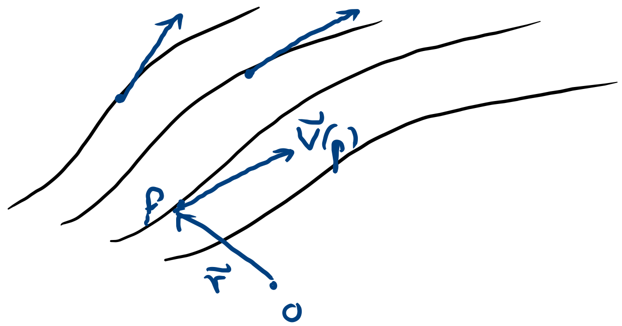
andere Situation:

an jedem Raumpunkt ein Repräsentant eines <u>anderen</u> Vektors

Physiker: $\vec{v}(1) \neq \vec{v}(2)$ oder $\vec{v}(\vec{r}_1) \neq \vec{v}(\vec{r}_2)$ "Vektorfeld"

Mathematiker: $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow$ Vektorraum

$p \longmapsto \vec{v}(p)$

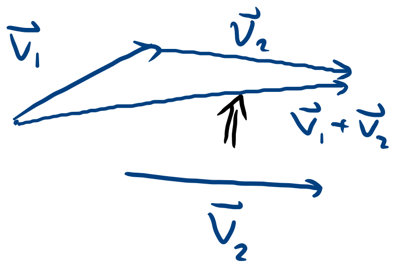


3 Eigenschaften:

(i) Multiplikation mit Zahl $\in \mathbb{R}$

(ii) Addition zweier Vektoren

(iii) Verhalten unter Drehungen



zu (i)

Zahl × Vektor = Vektor mit verändertem Betrag

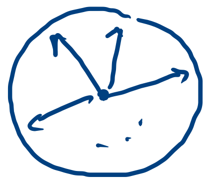
z.B. $-1.5\,m \cdot \nwarrow 3\,s^{-1} = \searrow 4.5\, m/s$

Notation: $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ Gegenvektor, $2\cdot\vec{a} = 2\vec{a}$

Einheitsvektor = Vektor $\cdot \frac{1}{\text{Betrag}}$ hat Betrag 1

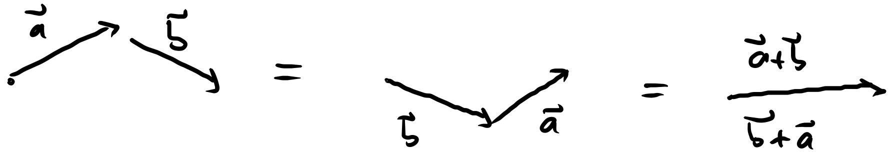
$\vec{e} = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ so dass $|\vec{e}| = 1$ und $\vec{a} = a\vec{e}$

∃ Einheitsvektoren für jede Richtung



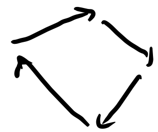
zu (ii)

- kommutativ



- assoziativ $(\vec a+\vec b)+\vec c = \vec a + (\vec b+\vec c)$
- Nullvektor $0\cdot\vec a = \vec 0$ oder $\vec a + (-\vec a) = \vec 0$

Notation: $\vec 0 = 0$



$\vec a+\vec b+\vec c+\vec d = 0$

1. Definition von Vektoren (im weiteren Sinn)

Vektoren = Elemente eines Vektorraum V
über einem Körper $\mathbb{R}$

definiert durch Axiome:

Axiome $\color{red}{(1.1)}$

A) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \quad \exists$ Addition $\vec{a}+\vec{b} \in V$ mit

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) & \text{Assoziativität} \\ 2) & \exists\, \vec{0}: \quad \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} & \text{Nullvektor} \\ 3) & \forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}): \quad \vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0} & \text{Gegenvektor} \\ 4) & \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} & \text{Kommutativität} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (V,+) \text{ ist} \\ \text{kommutative} \\ \text{Gruppe} \end{array}$$

B) $\forall \vec{a} \in V, \; \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists$ Skalarmultiplikation $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \in V$ mit

1) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a} + \alpha\cdot\vec{b}$ Distributivität

2) $\alpha\cdot(\beta\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$ Assoziativität

3) $\exists\, 1: \quad 1\cdot\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ Einselement

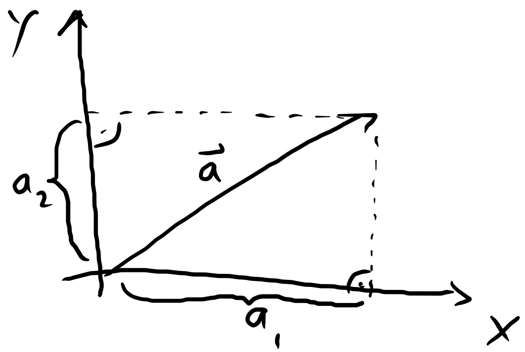
alle Objekte, die diesen Axiomen genügen, sind <u>Vektoren</u>

Komponenten

Geometrie → Algebra

zum Abmessen brauchen wir ein Bezugssystem

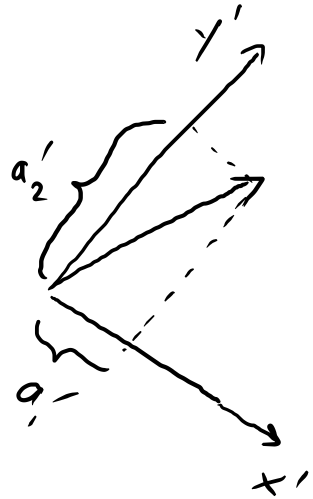
Der Vektor ist davon unabhängig!



kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2)$$

Vektor $\vec{a}$ hat im ersten K-System Komponenten a_1 & a_2



$$\vec{a} \doteq (a_1', a_2')$$

Im zweiten K-System hat er andere Komponenten a_1' & a_2'

Ortsvektor: $\vec{r} \doteq (x, y)$

gegeben ein Vektor in Komponenten, z.B. im $\mathbb{R}^3$

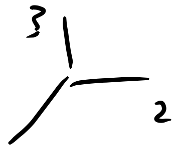
$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2, a_3)$$

- Betrag: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (1.2)
- Vielfaches: $\lambda \cdot \vec{a} \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ (1.3)
- Summe: $\vec{a} + \vec{b} \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ (1.4)

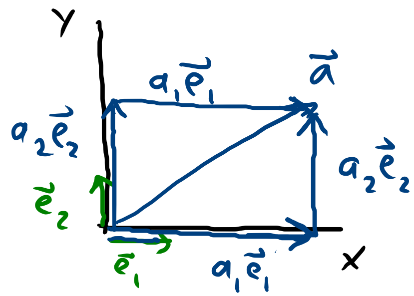
– Basisvektoren:

Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen

$\vec{e}_1 \doteq (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 \doteq (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 \doteq (0, 0, 1)$

Rechtssystem 

– Zerlegung eines Vektors



$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3 \qquad (1.5)$$
$$= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Kollinearität

$\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear, falls $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so dass $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$

(d.h. $\vec{a}, \vec{b}$ sind parallel oder antiparallel)

Spezialfall von

- Linearer Abhängigkeit:

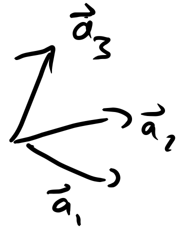
$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sind linear <u>unabhängig</u> falls

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0 \quad (\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n)$ impliziert dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

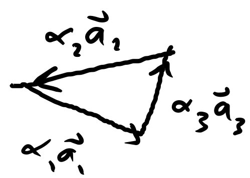
↑ Linearkombination

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sind linear <u>abhängig</u> falls $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0$ eine <u>Lösung</u> hat

Bsp. koplanar für $n=3$:



$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$



mit anderen Worten: $\vec{a}_n = -\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{a}_{n-1})$ „abhängig“

zu (iii): Verhalten der Komponenten unter passiven Drehungen...

2. Definition von Vektoren (normierten):

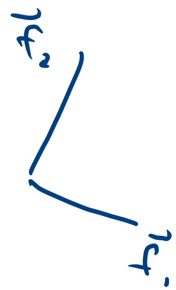
Vektoren sind Elemente eines normierten Vektorraums deren Komponenten linear in $\{\cos\varphi_{ik}\}$ transformieren unter einer Koordinatendrehung

$$\{\vec e_i\}_{i=1,2,3} \longrightarrow \{\vec f_k\}_{k=1,2,3} \quad \text{mit} \quad \varphi_{ik} = \measuredangle(\vec f_k, \vec e_i)$$

$\mathbb{R}^2$:

$$\vec a \doteq (a_1, a_2) \curvearrowright \vec a = \vec e_1 a_1 + \vec e_2 a_2$$

$$\vec a \doteq (a_1', a_2') \curvearrowright \vec a = \vec f_1 a_1' + \vec f_2 a_2'$$



Transformation: $(a_1, a_2) \xrightarrow[\cos\varphi_{ik}]{} (a_1', a_2')$

dies unterscheidet Vektoren (im engeren Sinn) von

- Skalaren: Komponenten transformieren nicht
- Tensoren: — " — — " — mit höheren Potenzen von $\cos\varphi_{ik}$
- Spinoren: — " — — " — linear in $\cos\frac{1}{2}\varphi_{ik}$

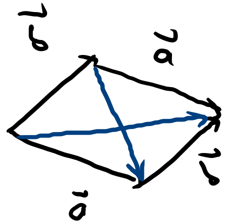
I.2 Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine (reelle) Zahl (Skalar)

soll linear sein in $\vec{a}$ & $\vec{b}$, symmetrisch: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

haben bereits Betrag (Norm): $|\vec{a}| = a$

Idee: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$



Parallelogramm-Gesetz: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2a^2 + 2b^2$

Skalarprodukt: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 =: 4\,\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad \checkmark$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Skalarprodukt in Komponenten:

Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad \text{etc.}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \cdot (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3)$$

$$\begin{aligned} = \; & \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \cancel{\vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_2 b_2} + \cancel{\vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_3 b_3} \\ & + \cancel{\vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_1 b_1} + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_2 b_2 + \cancel{\vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_3 b_3} \\ & + \cancel{\vec{e}_3 a_3 \cdot \vec{e}_1 b_1} + \cancel{\vec{e}_3 a_3 \cdot \vec{e}_2 b_2} + \vec{e}_3 a_3 \cdot \vec{e}_3 b_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1.6)$$

merke: Komponenten sind basisabhängig, Skalarprodukt nicht!

Spezialfall: $\vec{b} = \vec{a} \;\curvearrowright\; \vec{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$a = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

geometrisch:

$$(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b) \quad = \quad |\vec a+\vec b|^2$$

$$\vec a\cdot\vec a+\vec b\cdot\vec b+2\,\vec a\cdot\vec b \qquad \text{Längenquadrat von } \vec a+\vec b$$

$$a^2+b^2+2\,\vec a\cdot\vec b \qquad a^2+b^2+2ab_\parallel$$

Vergleich: $\vec a\cdot\vec b = a b_\parallel$

Trigonometrie: $\vec a\cdot\vec b = ab\cos\varphi \quad (1.7)\,,\quad \varphi = \sphericalangle(\vec a,\vec b)$

Vorzeichen: $\vec a\cdot\vec b<0$ wenn Winkel stumpf

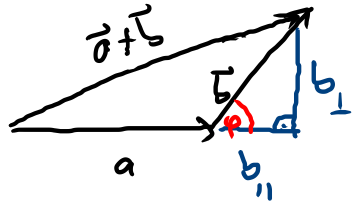
Winkel: $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b) = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{ab} = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\sqrt{\vec a\cdot\vec a\;\vec b\cdot\vec b}}$

orthogonal: $\vec a\perp\vec b \iff \vec a\cdot\vec b=0$

kollinear: $\vec a\parallel\vec b \iff \vec a\cdot\vec b = ab$ oder $-ab$

Projektion: $\vec a = \vec e_1 a_1+\vec e_2 a_2+\vec e_3 a_3 \iff a_i = \vec a\cdot\vec e_i \quad i=1,2,3$

NR:

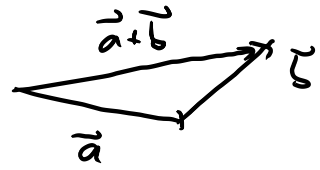


$$|\vec a+\vec b|^2 = (a+b_\parallel)^2+b_\perp^2$$
$$= a^2+2ab_\parallel+\underbrace{b_\parallel^2+b_\perp^2}$$
$$= a^2+2ab_\parallel+b^2$$

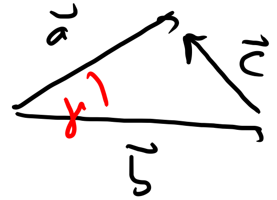
$$\frac{b_\parallel}{b} = \cos\varphi \leftarrow$$

Anwendungen in Geometrie:

- Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le ab$ (1.8)
- Dreiecksungleichung: $|a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b$ (1.9)



- Kosinussatz



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$c^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$$

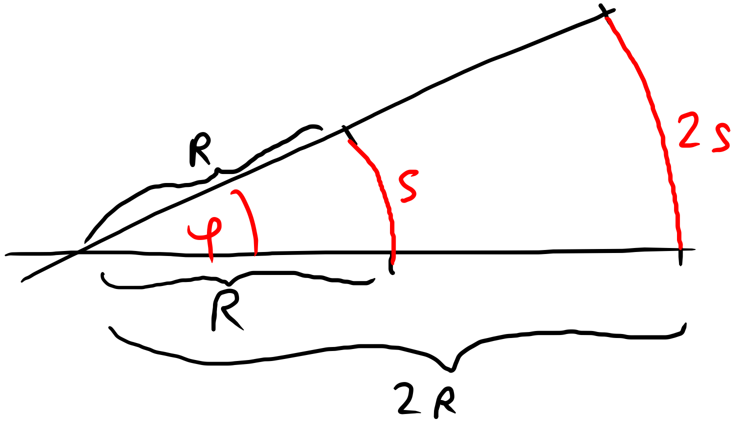
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Orthogonal-Zerlegung

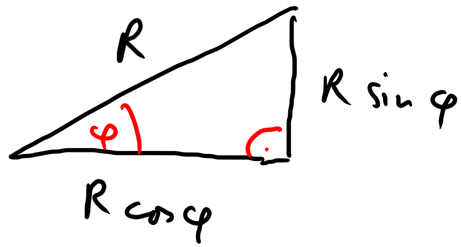
$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ relativ zu einem $\vec{v}$ $\qquad \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$

$$\vec{v}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot\vec{F}_{\parallel} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{F}_{\perp}} = v F_{\parallel} \;\rightsquigarrow\; F_{\parallel} = \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{F} \;\rightsquigarrow\; \vec{F}_{\parallel} = F_{\parallel}\frac{\vec{v}}{v} = \left(\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v}$$

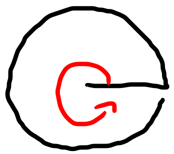
Über Winkel:

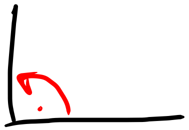


$\varphi = s/R$ dimensionslos

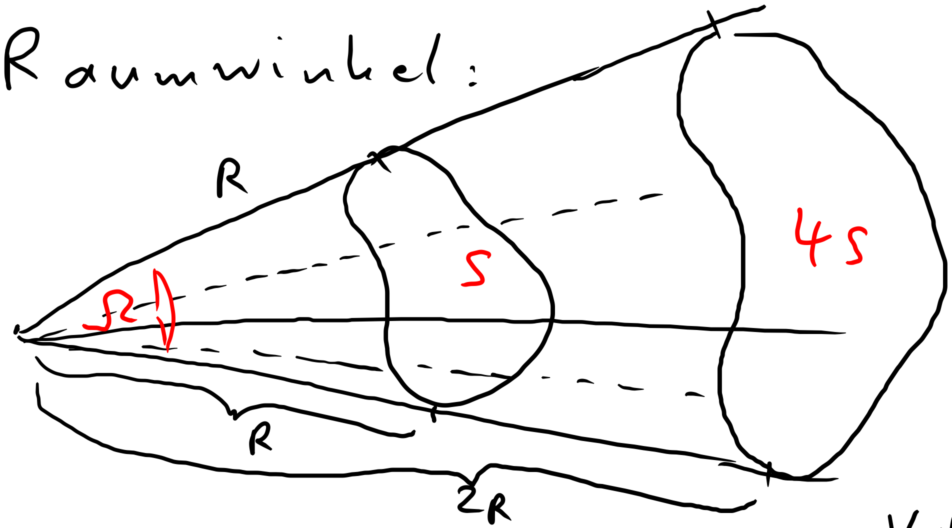


$s = R \cdot \varphi$

Vollwinkel  $\varphi = 2\pi$

rechter Winkel  $\varphi = \pi/2$

Raumwinkel:



S = Flächeninhalt eines Stückes Kugelschale (vom Radius R)

$$\Omega = S/R^2$$

Form der Fläche egal

Voll-Raumwinkel: $\Omega = 4\pi$

I.3 Kreuzprodukt

elektr. geladenes Teilchen, Geschwindigkeit $\vec{v}$, im Magnetfeld $\vec{B}$

spürt Kraft $\vec{F}$ experimentell:

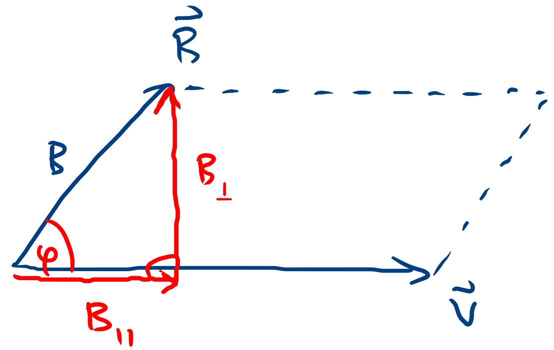
$\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \perp \vec{B}$, $F = |\vec{F}| = \underset{\text{Ladung}}{q}\, v\, \underset{\text{Anteil} \perp \text{zu } \vec{v}}{B_\perp}$

$(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ bilden ein Rechtssystem

Daumen, Zeigefinger, Mittel-finger

dies definiert das Kreuzprodukt

$$\vec{F} := q\, \vec{v} \times \vec{B} \qquad (1.10)$$



$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_\perp$

Betrag von $\vec{F}$? Berechne $B_\perp$

$B_{\parallel} = B \cos\varphi$

$B_\perp = B \sin\varphi$

Test: $B_{\parallel}^2 + B_\perp^2 = B^2$

also: $F = q\, v\, B \sin\varphi = q \cdot$ (Inhalt des aufgespannten Parallelogramms)

Def.: $\left.\begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b} = \vec{e}\, ab \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ \vec{e}^2=1,\quad \vec{e}\perp(\vec{a},\vec{b}),\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{e}) \text{ Rechtssystem}\end{array}\right\}$ (1.11)

merke: nur in 3 Dimensionen!

Eigenschaften: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ antisymmetrisch

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{a} = 0$$

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

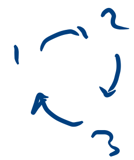
$$\underbrace{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{in }(\vec{b},\vec{c})\text{ Ebene}} \neq \underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}}_{\text{in }(\vec{a},\vec{b})\text{ Ebene}}$$

Kreuzprodukt in Komponenten:

$$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3 \qquad \vec e_2 \times \vec e_3 = \vec e_1 \qquad \vec e_3 \times \vec e_1 = \vec e_2$$

$$\vec e_1 \times \vec e_1 = 0 \qquad \vec e_2 \times \vec e_2 = 0 \qquad \vec e_3 \times \vec e_3 = 0$$

$$\vec e_2 \times \vec e_1 = -\vec e_3 \qquad \vec e_3 \times \vec e_2 = -\vec e_1 \qquad \vec e_1 \times \vec e_3 = -\vec e_2$$



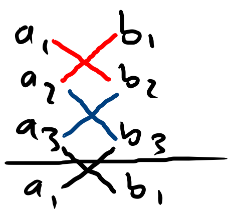
$$\vec a \times \vec b = (\vec e_1 a_1 + \vec e_2 a_2 + \vec e_3 a_3) \times (\vec e_1 b_1 + \vec e_2 b_2 + \vec e_3 b_3)$$

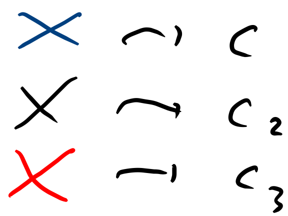
$$\begin{aligned} = & \cancel{\vec e_1 \times \vec e_1 \, a_1 b_1} + \vec e_1 \times \vec e_2 \, a_1 b_2 + \vec e_1 \times \vec e_3 \, a_1 b_3 \\ & + \vec e_2 \times \vec e_1 \, a_2 b_1 + \cancel{\vec e_2 \times \vec e_2 \, a_2 b_2} + \vec e_2 \times \vec e_3 \, a_2 b_3 \\ & + \vec e_3 \times \vec e_1 \, a_3 b_1 + \vec e_3 \times \vec e_2 \, a_3 b_2 + \cancel{\vec e_3 \times \vec e_3 \, a_3 b_3} \end{aligned}$$

$$= \vec e_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec e_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec e_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

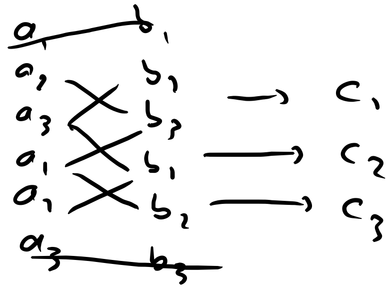
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

Schema:

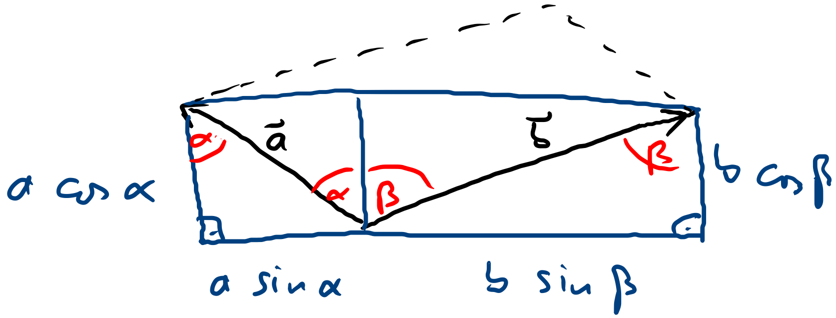




oder



Anwendung in der Geometrie: Additionstheorem



Inhalt

$$A_{\square} = A_{\diamond}$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\alpha+\beta)$$

$$A_{\square} = A_{\square} + A_{\square}$$

$$= a \sin\alpha \cdot b \cos\beta + a \cos\alpha \cdot b \sin\beta$$

$\sin(\alpha+\beta) =$

$\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (1.13)$$

"bac-cab" Regel

Beweis:

- wissen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in (\vec{b}, \vec{c})$-Ebene
- also: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ finde Zahlen β & γ
- skalar multiplizieren mit $\vec{a}$:

$$0 = \beta\, \vec{b}\cdot\vec{a} + \gamma\, \vec{c}\cdot\vec{a}$$

- Lösung: $\beta = \lambda\, \vec{c}\cdot\vec{a}$, $\gamma = -\lambda\, \vec{b}\cdot\vec{a}$ finde λ

$\longrightarrow$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \lambda\, \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

- Spezialfall: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}_1$, $\vec{c} = \vec{e}_2$

$$\vec{e}_1 \times \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{} = \lambda\, \vec{e}_1 \underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)}_{=0} - \lambda\, \vec{e}_2 \underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)}_{=1}$$

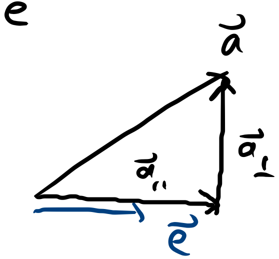
$$-\vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\lambda e_2 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \qquad \square$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \qquad (1.14)$$

Jacobi-Identität

Orthogonal-Zerlegung von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{e}$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \qquad \text{bzgl. } \vec{e} \qquad \vec{e}\cdot\vec{e} = 1$$

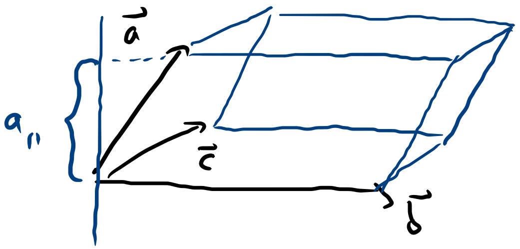


$$(1.15)\quad \begin{cases} \vec{a}_{\parallel} = (\vec{e}\cdot\vec{a})\,\vec{e} \qquad a_{\parallel} = \vec{e}\cdot\vec{a} \\ \vec{a}_{\perp} = \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e}) \overset{(1.13)}{=} \vec{a}\underbrace{(\vec{e}\cdot\vec{e})}_{1} - \vec{e}\underbrace{(\vec{e}\cdot\vec{a})}_{a_{\parallel}} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} \quad \checkmark \end{cases}$$

mehrfache Produkte

$$(1.16)\quad \begin{cases} (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \\ (\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2(1-\cos^2\varphi) = a^2b^2\sin^2\varphi \end{cases}$$

$$(1.17)\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_{\parallel}\cdot|\vec{b}\times\vec{c}| = \text{Volumen des von } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ aufgespannten Spats}$$



„Spatprodukt“

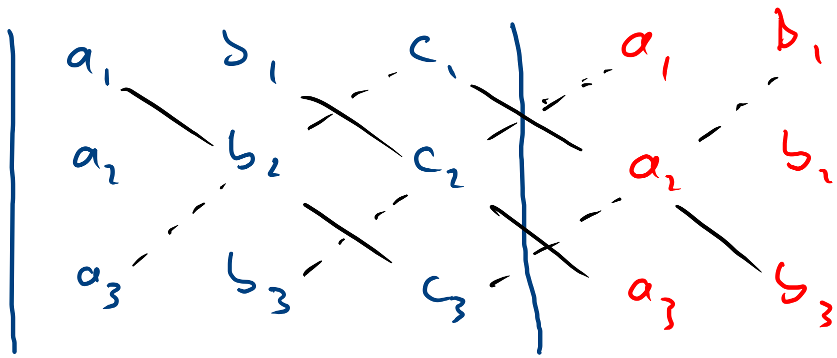
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

in Komponenten

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$
$$- a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Summe über alle Permutationen der Indizes 1, 2, 3
mit Gewicht $= \begin{cases} +1 & \text{gerade Permutation} \\ -1 & \text{ungerade Permutation} \end{cases}$

Rechenschema:



——— : +1

- - - - : −1

„Sarrus-Regel"

I.4 Index-Schreibweise

Skalarprodukt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{matrix} \right\} =: \delta_{ij}$$

Tabelle δ_{ij}

$j \backslash i$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

Kronecker-Symbol

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} \, a_i b_j = \sum_{i=j=1}^{3} a_i b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \qquad (1.6')$$

Kreuzprodukt

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, c_k(i,j) =: \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, \varepsilon_{kij}$$

Levi-Civita-Symbol (ε-Symbol)

ε ist $= 0$ falls 2 Indizes gleich sind

ε ist $\neq 0$ nur für

k	i	j	ε_{kij}
1	2	3	+1
2	3	1	+1
3	1	2	+1
1	3	2	−1
3	2	1	−1
2	1	3	−1

$$\vec a \times \vec b = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec e_i a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \vec e_j b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\vec e_i \times \vec e_j}\, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \vec e_k \varepsilon_{kij}}\, a_i b_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec e_k \varepsilon_{kij} a_i b_j \qquad (1.12')$$

$$(\vec a \times \vec b)_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{kij} a_i b_j \qquad (1.12'')$$

$$(\vec a \times \vec b)_\ell = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec e_\ell = \sum_{k=1}^{3} (\vec a \times \vec b)_k \vec e_k \cdot \vec e_\ell = \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec e_k \cdot \vec e_\ell \, \varepsilon_{kij} a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \delta_{k\ell} \varepsilon_{kij} a_i b_j \underset{\uparrow}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{\ell ij} a_i b_j \quad \checkmark$$

nur Summand $k=\ell$ überlebt in Σ_k

Spatprodukt

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \sum_{k=1}^{3} a_k (\vec b \times \vec c)_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_k \varepsilon_{kij} b_i c_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{kij} a_k b_i c_j$$

$$= \text{Determinante } |\vec a, \vec b, \vec c| \qquad (1.18')$$

Rechenregeln / Eigenschaften

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

$$\sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \qquad \sum_{i,j} \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_i \delta_{ii} = 3 \qquad (1.19)$$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}\,\varepsilon_{ijk} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \qquad (1.20)$$

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

dies ist das Gleiche wie „bac-cab" oder $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c}\;\vec{b}\cdot\vec{d} - \vec{a}\cdot\vec{d}\;\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \longrightarrow \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

Einsteinsche Summationskonvention: lasse Σ weg!